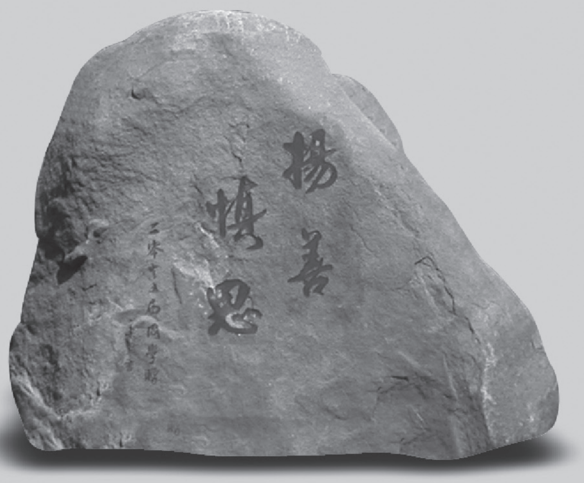
YANG SI JIAO YU

# 杨思教育

（第十二期）



上海市杨思高级中学教科研室主办

二〇一二年十月

# 目 录

# 三角函数和反三角函数功能概述

张明刚

## 案例概要

三角函数和反三角函数是学生在高中阶段学习的重要内容，学生在学习三角函数与反三角函数性质时，由于条件所限只能机械地、被动地学习，本案例试图借用技术手段—TI83+图形计算器探索新方法，让学生自己作出函数图像，自己发现问题总结规律，使学生在理解的基础上，运用公式解决问题，帮助学生摆脱机械的套用公式。使同学易于学习本章内容，乐于探索三角中的问题，享受成功的体验。

## 问题情境

一、三角函数的图形

研究实数 $x$ 与正弦值 $\sin x$ 之间的对应关系；

二、函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像

1、函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像是什么样的？

2、系数$A$、$\omega$、$\varphi$对函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像有何影响？

三、三角不等式或方程求解

1、求不等式$\sin x < \sin(2x)$在区间$[0,2\pi)$上的解集；

2、判断方程$\sin x = \lg x$的解的个数；

四、反三角函数

1、正弦函数$y = \sin x, x \in R$是否有反函数？若有，请求出；若没有，请说明理由。

2、当函数$y = \sin x$的定义域怎样时，它有反函数？

## 活动过程

1．情景一的解决可以借助单位圆，将实数 $x$ 与正弦值 $\sin x$ 的对应关系表示出来。

2．情景二的解决充分利用了计算器的强大的函数图像功能以及使用便捷的优势，为学生自主探究的学习提供很好的技术支持。

3．情景三的解决利用了计算器的数据表功能、函数图像功能、作图功能。特别在三角不等式的解决中使用了不同的方法，也正是借助这些功能使得原本单一的解题途径变得丰富，在挖掘学生创新能力方面的工作能更具体的展开。

4．情景四的解决利用了计算器的函数图像功能、作图功能，让学生有效的借助工具，自觉的采用“概念同化”的学习模式，学习新的知识。

5．归纳总结：借助TI83+图形计算器的各种功能，很好的做到了简化繁琐的三角计算，简易地利用图形判断三角函数、反三角函数的各种性质，真正做到使学生乐于探索三角中的问题。

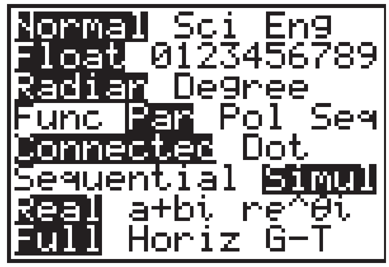
## 操作示范

一、三角函数的图形

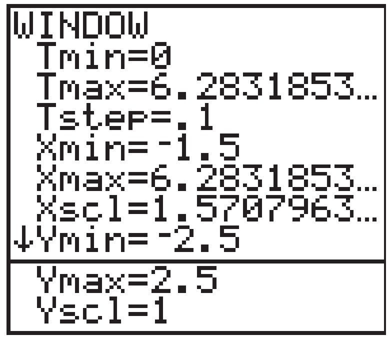
1、研究实数 与正弦值 之间的对应关系；

按下$\boxed{\text{MODE}}$，设置为Radian、Par、Simul。如右图。

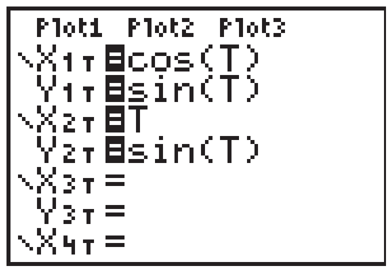
按下WINDOW，调整设置，如右图。



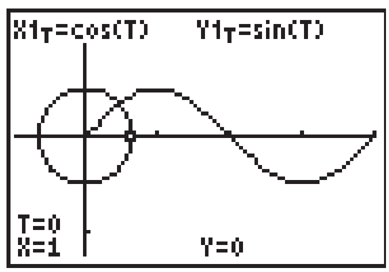

按下Y=，输入函数$\begin{cases} x_{1T}=\cos T \\ y_{1T}=\sin T \end{cases}$和$\begin{cases} x_{2T}=T \\ y_{2T}=\sin T \end{cases}$，如右图。



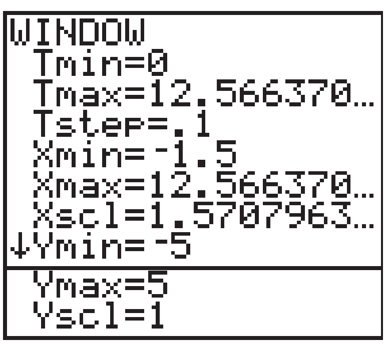

按下TRACE，观察图像，如右图。

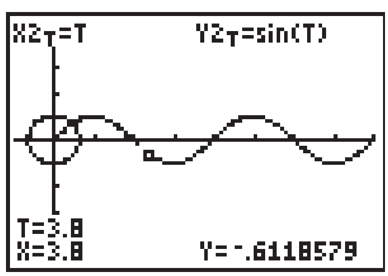



用键▲、▼选择曲线，用键◀、▶比较两条曲线上对应点的纵坐标。在这个图中，任意实数x都对应着一个角T（其始边是x轴的正半轴，弧度数等于这个实数x），角T的终边与单位圆交点的纵坐标即为sinx，点（x，sinx）在正弦函数的图像上。




按下WINDOW，将窗口设置为右图。再按TRACE，重复上述过程，可看到在$[0,4\pi]$上，实数 $x$ 与 $\sin x$ 之间的对应关系。



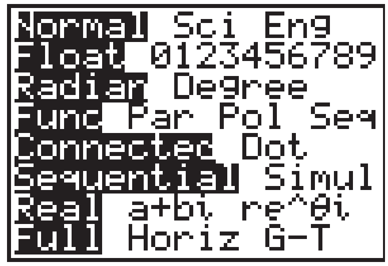



二、函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像

1、函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像是什么样的？

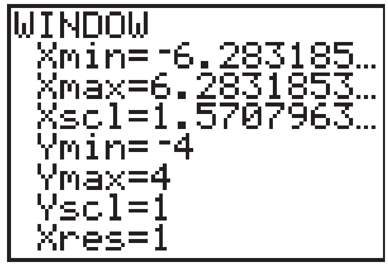
按下MODE，设置为弧度制，如右图。

利用计算器任意选取几个函数，




让学生了解函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像。

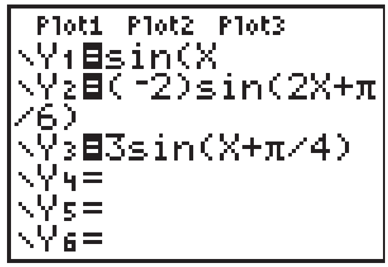
按下WINDOW，将窗口设置为右图。

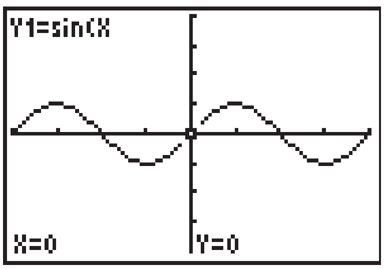


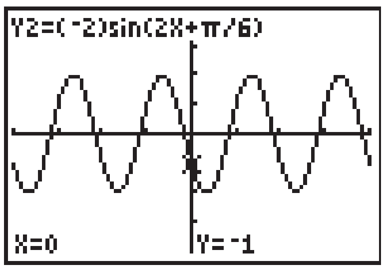

按下Y=，输入函数

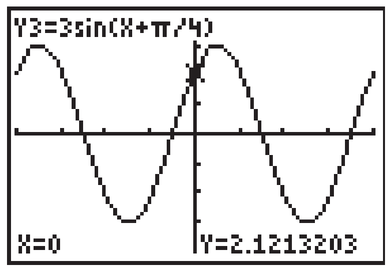
$$y = \sin x, y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

分别画出，观察图像。




2、系数$A$、$\omega$、$\varphi$对函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图像有何影响？

利用控制变量法对$A$、$\omega$、$\varphi$进行不同的赋值，观察函数的图像，探索$A$、$\omega$、$\varphi$对$y = A\sin(\omega x + \varphi)$图像所起的作用。

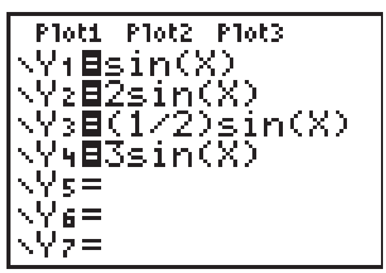
用图形计算器画函数$y = A\sin x, y = \sin\omega x, y = \sin(x + \varphi)$和$y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$的简图，分四组绘图，并讨论下列问题：

第一组：通过给$A$赋不同值，研究函数$y = A\sin x$与函数$y = \sin x$的图像之间的关系，讨论$A$在图像纵向变换中的作用。

按下Y=，输入函数

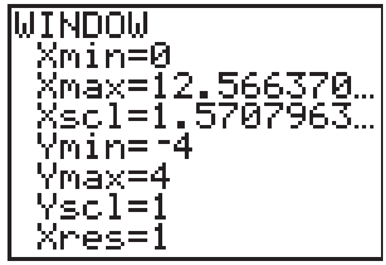
$$y_1 = \sin x, y_2 = 2\sin x, y_3 = \frac{1}{2}\sin x, y_4 = 3\sin x,$$

如右图。

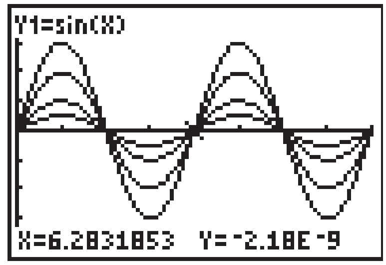



按下WINDOW，调整设置，如右图。

按下TRACE，得到右图。



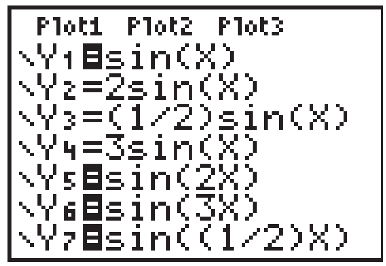

观察得到：对于相同的 $x$ 的值，把 $y_1=\sin x$ 图像上所有点的纵坐标伸长（当 $A>1$ 时）或缩短（当 $0<A<1$ 时）到原来的 $A$ 倍，横坐标不变，即可得 $y=A\sin x$ 的图像。



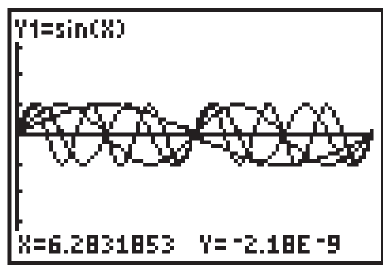

第二组：通过给 ω 赋不同值，研究函数 $y=\sin\omega x$ 与函数 $y=\sin x$ 的图像之间的关系，讨论 ω 在图像变换中的作用

按下Y=，输入函数 $y_5=\sin 2x, y_6=\sin 3x, y_7=\sin\frac{1}{2}x$

如右图。




按下TRACE，得到右图。



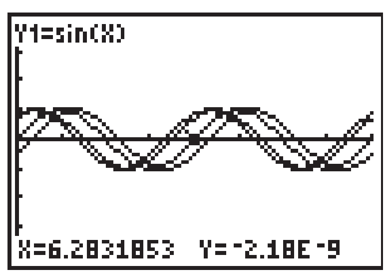

观察得到：对于相同的 $x$ 的值，把 $y_1=\sin x$ 图像上所有点的横坐标缩短（当 $\omega>1$ 时）或伸长（当 $0<\omega<1$ 时）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，纵坐标不变，即可得 $y=\sin(\omega x)$ 的图像。

第三组：通过给 φ 赋不同值，研究函数 $y=\sin(x+j\ )$ 与函数 $y=\sin x$ 的图像之间的关系，讨论 φ 在图像变换中的作用。

按下Y=，输入函数

$$y_8=\sin\left(x+\frac{p}{4}\right), y_9=\sin\left(x-\frac{p}{6}\right), y_0=\sin\left(x+\frac{p}{3}\right),$$

如右图。


按下TRACE，得到右图。观察得到：对于相同的 $x$ 的值，把 $y_1=\sin x$ 图像上所有点向右（$\varphi<0$）或向左($\varphi>0$)平移 $|\varphi|$ 个单位，即可得 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像。

第四组：通过给 $b$ 赋不同值，研究函数$y = A\sin(\omega x+\varphi)+b$与函数$y = A\sin(\omega x+\varphi)$的图像之间的关系，讨论 $b$ 点在图像变换中的作用。（略）

通过上述探索讨论，回答下列问题：

1）.比较两函数 $y = 3\sin x$ 和 $y = \sin x, x \in R$ 图像之间的关系.

2）.比较两函数$y = 3\sin(2x)$和$y = 3\sin x, x \in R$图像之间的关系.

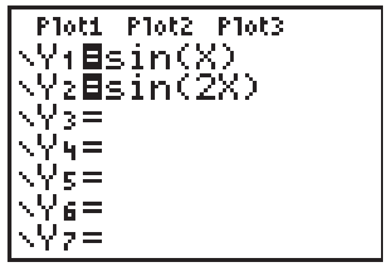
3）.比较两函数$y = 3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$和$y = 3\sin(2x), x \in R$图像之间的关系.

4）.比较两函数$y = 3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$和$y = 3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right), x \in R$图像之间的关系.

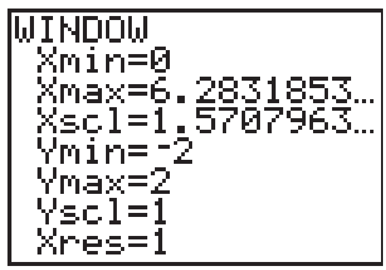
三、三角不等式或方程求解

1、求不等式$\sin x < \sin(2x)$在区间$[0,2\pi)$上的解集；

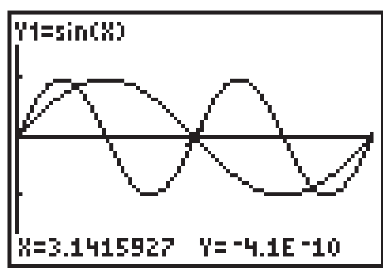
按下Y=，输入函数$y_1 = \sin x, y_2 = \sin 2x$，如右图。



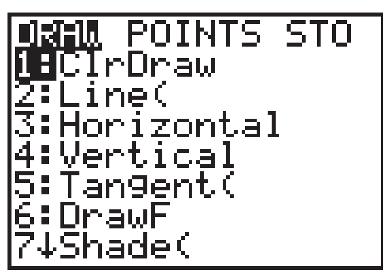

按下WINDOW，设置显示格式，如右图。



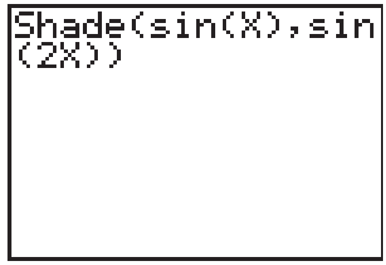

按下TRACE，观察图像。



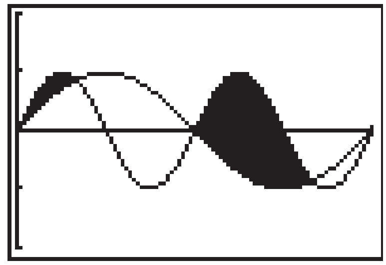

按下2nd、[QUIT]，返回主屏幕，然后按下2nd、[DRAW]，输入[A-LOCK]，选择Shade( 函数，如右图。



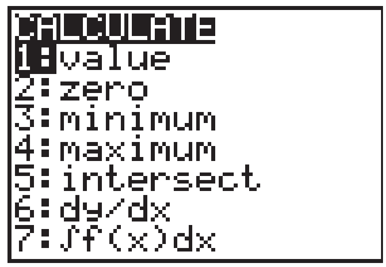
输入 $\sin x,\sin 2x$，并按[ENTER]，如右图。




得到右图，则使函数 $y_1=\sin x$ 在 $y_2=\sin 2x$ 下方的区域按图所示的方式显示出来。

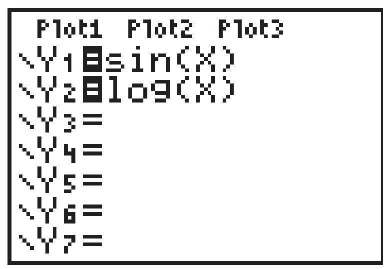


按下[2nd]、[CALC]，输入5，选择intersect函数，如右图。继续可求出两曲线在区间$[0,2\pi)$内交点的横坐标依次为0，1、047，3、142，5、236，所以不等式$\sin x<\sin(2x)$在区间$[0,2\pi)$上的解集近似地可表示为$(0,1.047)$和$(3.142,5.236)$。

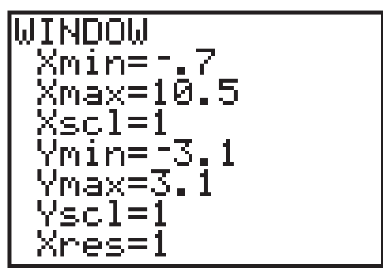



2．判断方程$\sin x=\lg x$的解的个数；

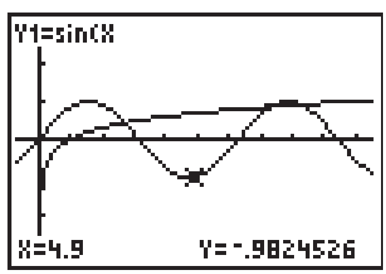
按下[Y=]，输入函数$y_1=\sin x, y_2=\lg x$，如右图。



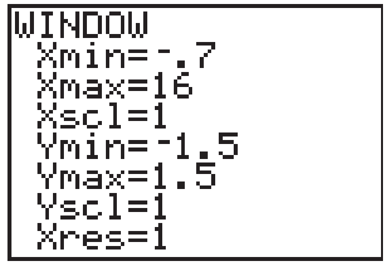

按下[WINDOW]，改变窗口设置：如右图所示。



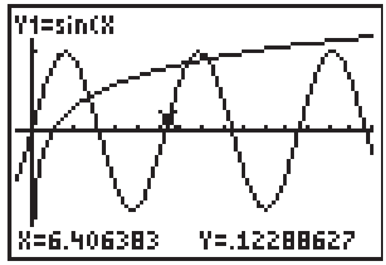

按下[TRACE]，如右图。



再调整窗口设置，观察图像规律。



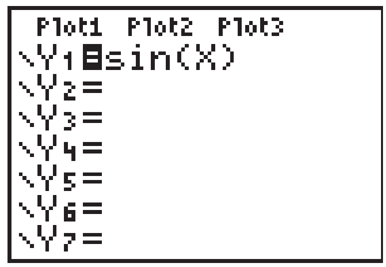

得到右图。可知方程$\sin x=\lg x$解的个数是3个。



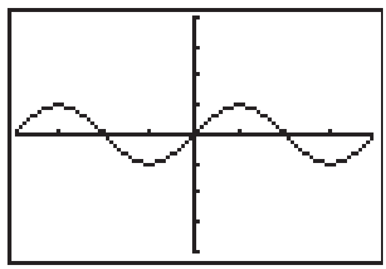

四、反三角函数与最简三角方程

1、正弦函数$y=\sin x, x\in \boldsymbol{R}$是否有反函数？若有，请求出；若没有，请说明理由。

按下$\boxed{\text{Y=}}$，输入函数$y_1=\sin x$，如右图，

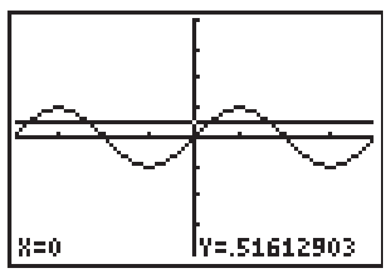



然后按下$\boxed{\text{ZOOM}}$、$\boxed{7}$，得到右下图。



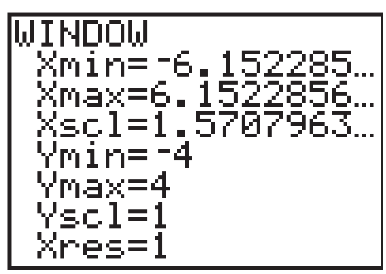
再按$\boxed{\text{2nd}}$、[DRAW]，$\boxed{3}$，画一条水平线（还可以利用键$\boxed{\blacktriangle}$、$\boxed{\blacktriangledown}$移动该水平直线）。

从图中不难得出结论：定义在$\boldsymbol{R}$上的正弦函数不存在反函数。

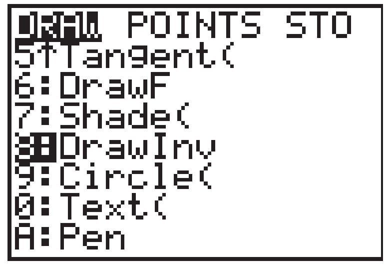



2、当函数$y=\sin x$的定义域怎样时，它有反函数？

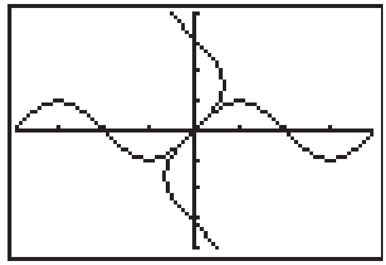
按下$\boxed{\text{WINDOW}}$，设置窗口，如右图。

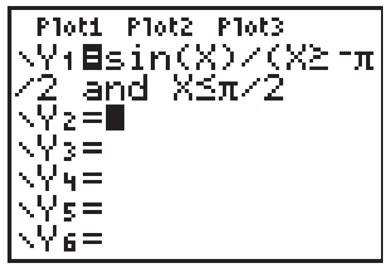


按下[2nd]、[DRAW]、[8]，如右图。




返回主屏幕，按下[VARS]，选择[Y-VARS]，
按下[1]，[1]，[ENTER]，得到右图。

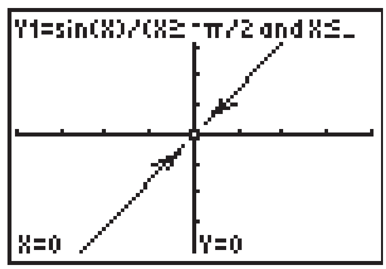


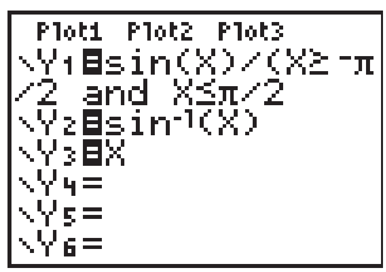


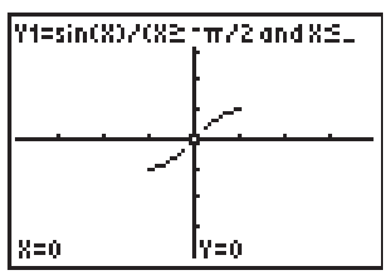

观察得到，在 $\boldsymbol{R}$ 上 $y=\sin x$ 无反函数，

但 $y=\sin x, x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 有反函数 。

按下[Y=]，输入右图函数，并按下[TRACE]，观察。



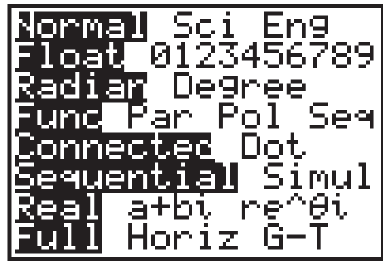



## 问题推广

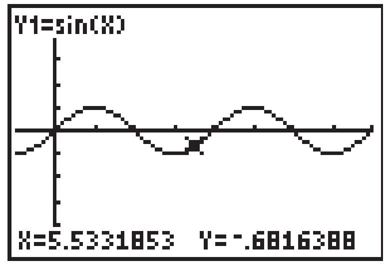
探索1：如何描述正弦函数的周期性？

按下[MODE]，调整设置，如右图。



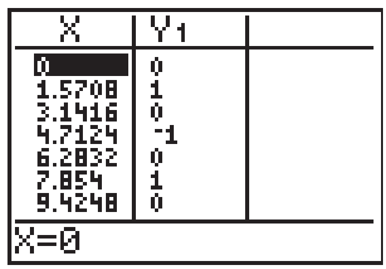

按下[Y=]，输入$y=\sin x$，

然后按下[TRACE]，显示图像。




按下[2nd]、[TBLSET]设置数据表状态，如右图。

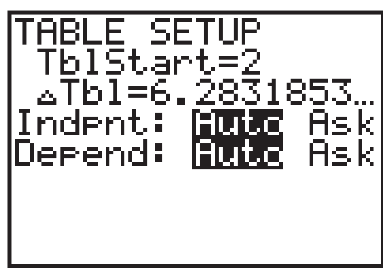

按下[2nd]、[TABLE]查看数据表，观察变化规律，如右图。




再按下[2nd]、[TBLSET]更改数据表状态，如右图。

按下[2nd]、[TABLE]查看数据表，继续观察变化规律，如右图。

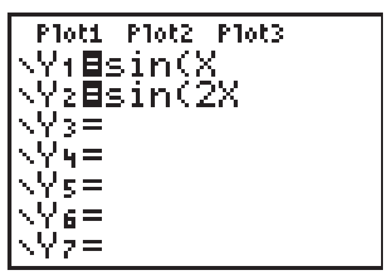
将[TBLSET]中的TblStart值更改为3，4，5，$3\pi$，$\frac{11}{2}\pi\cdots$，再按下[2nd]、[TABLE]，观察数据表，发现，对于正弦函数$y=\sin x$，存在常数$T=2\pi$（即$\Delta Tbl=2\pi$），使得当$x$取$R$内得每一个值时（即$TBLSET$为任意实数时），都有$\sin(x+2p)=\sin x$成立。



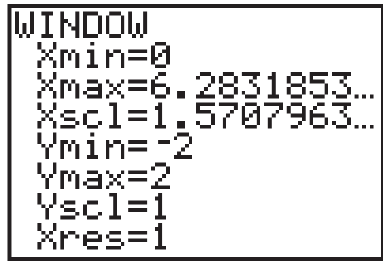

探索2：用其他方法求不等式$\sin x<\sin(2x)$在区间$[0,2\pi)$上的解集；

列表法：

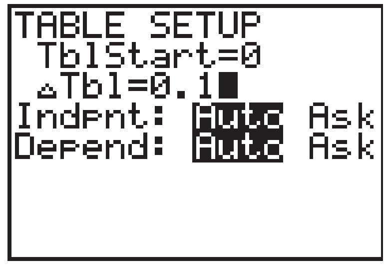
按下[Y=]，输入$y_1=\sin x, y_2=\sin(2x)$，如右图。



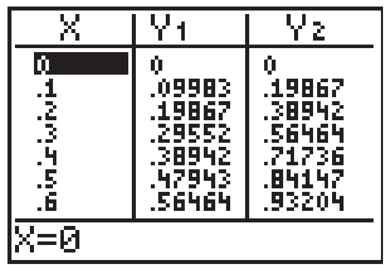
按下WINDOW，调整窗口设置如右图。




按下2nd、[TBLSET]，设置如右图。




按下2nd、[TEST]，观察数据表。



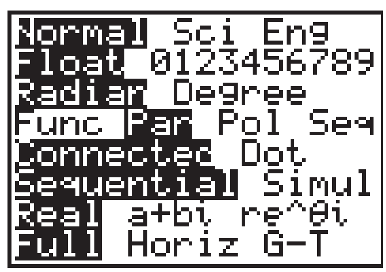

从窗口中可以看出，不等式$\sin x < \sin(2x)$在区间$[0,2\pi)$上的解集为$(0,1)$和$(3.2,5.2)$。

代数法：

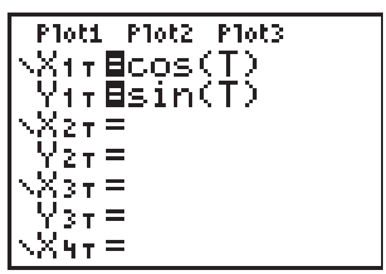
由两倍角公式可得：$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$，不等式$\sin x < \sin(2x)$可变为

$\sin x(1-2\cos x) < 0$。不等式$\sin x(1-2\cos x) < 0$可变为$\begin{cases}\cos x > \dfrac{1}{2}\\ \sin x > 0\end{cases}$或$\begin{cases}\cos x < \dfrac{1}{2}\\ \sin x < 0\end{cases}$。

按下MODE，设置为Radian、Par。如右图。

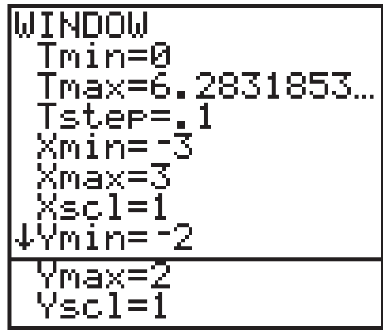



按下Y=，输入$x_{1T} = \cos t, y_{1T} = \sin t$，如右图。

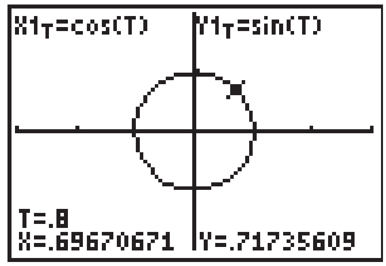


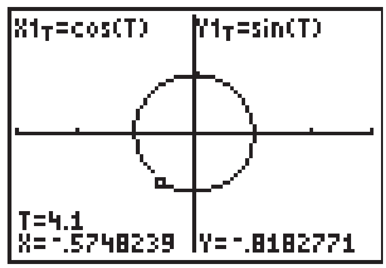

按下WINDOW，调整设置，如右图。

按下TRACE，用◀▶键依此显示每一个 $t$ 所对应的余弦值(横坐标)和正弦值(纵坐标)。




使不等式$\begin{cases}\cos x > \dfrac{1}{2}\\ \sin x > 0\end{cases}$成立的角 $t$ 的范围，是使单位圆上的点的横坐标$X > \dfrac{1}{2}$，纵坐标 $Y > 0$，即$t \in (0,\dfrac{\pi}{3})$。使不等式$\begin{cases}\cos x < \dfrac{1}{2}\\ \sin x < 0\end{cases}$成立的角 $t$ 的范围，是使单位圆上的点的横坐标$X < \dfrac{1}{2}$，纵坐标$Y < 0$，即$t \in (\pi,\dfrac{5\pi}{3})$。

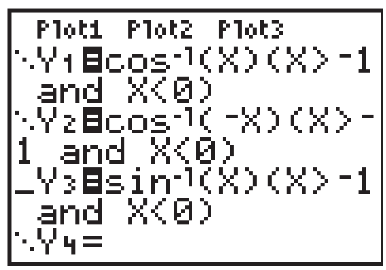


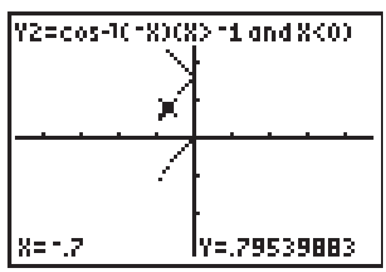

综上可知，不等式$\sin x < \sin(2x)$在区间$[0,2\pi)$上的解集为$(0,\dfrac{\pi}{3})\cup(\pi,\dfrac{5\pi}{3})$。

探索3：比较大小：$\arccos\alpha,\arccos(-\alpha),\arcsin\alpha$，其中$-1<\alpha<0$

按下Y=，输入函数$y_1=\arccos x(x>-1\ and\ x<0)$，
$y_2=\arccos(-x)(x>-1\ and\ x<0)$，
$y_3=\arcsin x(x>-1\ and\ x<0)$，如右图。



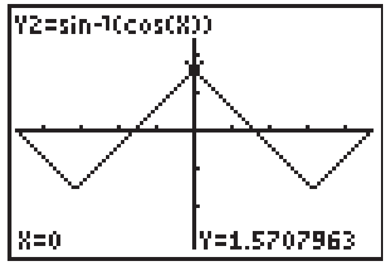

按下ZOOM，4，得到右图。利用键▲、▼选择函数，观察图像得到，当$-1<\alpha<0$时，
$\arcsin\alpha<\arccos(-\alpha)<\arccos\alpha$。

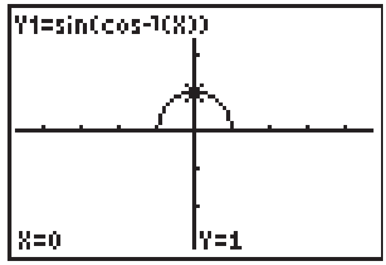


探索4：比较函数$y=\sin(\arccos x)$与$y=\arcsin(\cos x)$的异同.

按下$\boxed{\text{Y=}}$，输入函数$\boldsymbol{y_1=\sin(\arccos x)}$，$\boldsymbol{y_2=\arcsin(\cos x)}$，然后按下$\boxed{\text{ZOOM}}$，$\boxed{4}$，

分别得到函数图像，通过比较得异同。

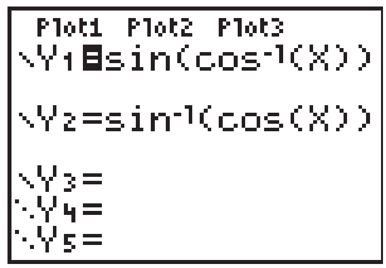


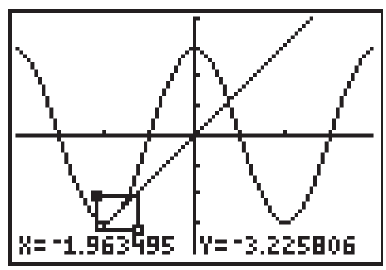

## 实习作业

1、求方程$x=3\cos x$的近似解(精确到小数点后三位)。

按下$\boxed{\text{Y=}}$，输入函数$\boldsymbol{y_1=x, y_2=3\cos x}$，如右图。

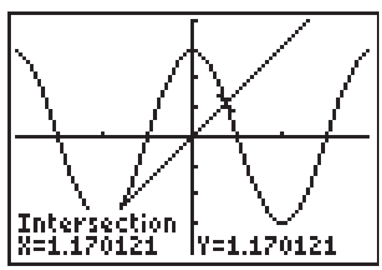



按下$\boxed{\text{ZOOM}}$，$\boxed{7}$，得到右图。发现有三个根。

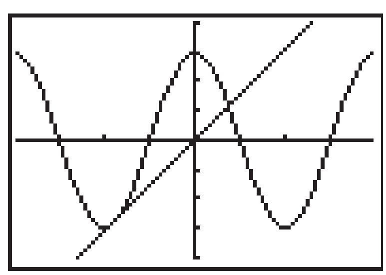


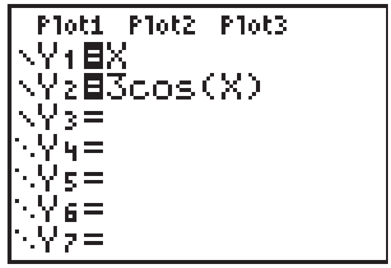

按下$\boxed{\text{2nd}}$、[CALC]、$\boxed{5}$，求右上角的交点，
可得一个根为1.170。

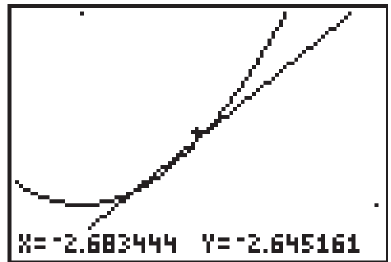
按下$\boxed{\text{ZOOM}}$，$\boxed{1}$，放大左下角的交点，
得到右图。

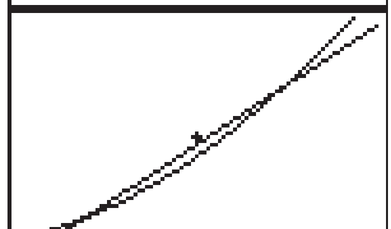



重复上一步，进一步放大图像。
按下$\boxed{\text{2nd}}$、[CALC]、$\boxed{5}$，求两个交点，
可得另两个根为-2、938，-2、663。
故方程$\boldsymbol{x=3\cos x}$的近似解为，1.170，-2.938，-2.663。



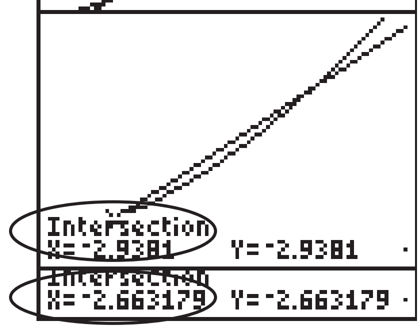


2、比较函数$y=\cos(\arcsin x)$与$y=\arccos(\sin x)$的异同。

按下$\boxed{\text{Y=}}$，输入函数$\boldsymbol{y_1=\cos(\arcsin x)}$，如右图。




按下$\boxed{\text{ZOOM}}$、$\boxed{4}$，得到图像，利用键$\boxed{\blacktriangle}$、$\boxed{\blacktriangledown}$，选择两个函数，比较异同。